**ＥＡ　解析学・位相序説　　講義報告**[6]

２００８年4月6日（日）　１４：３０−１７：３０

　線形位相空間における**ネット完備**と**列完備**を再定義し、距離空間においては、ネット完備と列完備は同値であることを示した。次に、線形作用素の作用素ノルムを定義し、線形作用素が有界になるための同値条件を示した。最後に閉作用素を定義し、連続でない閉作用素の例として、閉区間上で一回連続微分可能な関数全体を定義域にもつ微分作用素を扱った。

# 5　線型空間の位相

**定義 5.1 (ネット完備).** 線形位相空間 $E$ が**ネット完備**であるとは、任意の *Cauchy* ネット $\varphi : D \to E$ がネット収束する点を $E$ 上にもつことである。

**定義 5.2 (列完備).** 距離空間 $(X, d)$ が**列完備**であるとは、任意の *Cauchy* 列 $\varphi : \mathbb{N} \to X$ が収束する点を $X$ 上にもつことである。

**定理 5.1.** 距離空間 $(X, d)$ が列完備ならば、距離空間 $(X, d)$ はネット完備である。

**定理 5.2.** $X$ を空でない集合、$(Y_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族とする。$X$ には、$X$ から各 $Y_\lambda$ への写像族 $\Theta = \{\eta_\lambda : X \to Y_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ に関する始位相により、位相空間となる。このとき、位相空間 $Y$ から $X$ への写像 $F$ が連続であるための必要十分条件は、任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して、$\eta_\lambda \circ F : Y \to Y_\lambda$ が連続になることである。

# 6　線形作用素

**定義 6.1 (作用素のノルム).** $(E, \|\ \|_E), (F, \|\ \|_F)$ をノルム空間とするとき、$E$ から $F$ への線形作用素 $T$ に対して、

$$\|T\| = \sup\{\|T(v)\|_F \mid \|v\|_E \leq 1\}$$

により定義される $\|T\|$ を**作用素ノルム**と言う。

**練習問題 6.1.** $(E, \|\ \|_E), (F, \|\ \|_F)$ をノルム空間とする。$T$ を $E$ から $F$ への線形作用素とするとき、

*1.*
$$\|T\| = \inf\{C > 0 \mid \|T(v)\|_F \leq C\|v\|_E\}$$
が成立することを示せ。

*2.* $\|T\| < \infty$ なる $E$ から $F$ への線形作用素全体を $\mathfrak{B}(E, F)$ と表すとき、$(\mathfrak{B}(E, F), \|\ \|)$ はノルム空間になることを示せ。

**定理 6.1.** $(E, \|\ \|_E), (F, \|\ \|_F)$ をノルム空間とする。$T$ を $E$ から $F$ への線形作用素とするとき、次の条件は同値である。

[6] 数学工房　http://www.sugakukobo.com/

1. $T$ は $0_E$ で連続である。

2. $T$ は $E$ 上で連続である。

3. $T$ は有界である。

**定義 6.2 (閉作用素).** $(E, \| \|_E), (F, \| \|_F)$ をノルム空間、$T$ を定義域 $D(T) \subset E$ から $F$ への線形作用素とする。点列 $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ が $v_0 \in E$ に収束し、$\lim_{n\to\infty} T(v_n) = w_0$ を満たすならば、$v_0 \in D(T)$ でかつ、$T(v_0) = w_0$ が成立するとき、$T$ を**閉作用素**という。

**補題 6.1.** $(E, \| \|_E), (F, \| \|_F)$ をノルム空間、$T$ を定義域 $D(T) \subset E$ から $F$ への線形作用素とするとき、$T$ が $E$ 上連続ならば、$T$ は閉作用素である。

**例題 6.1.** 閉区間 $I = [0, 1]$ 上の $\mathbb{K}-$ 値連続関数の全体 $C(I, \mathbb{K})$ は、ノルム

$$\|f\|_I = \sup\{|f(x)| \mid x \in I\}$$

により、*Banach* 空間になる。$C(I, \mathbb{K})$ で稠密な一回連続微分可能な関数の全体 $C^1(I, \mathbb{K})$ を定義域にもつ微分作用素を

$$\frac{d}{dx} : C^1(I, \mathbb{K}) \to C(I, \mathbb{K})$$

とするとき、

1. $\dfrac{d}{dx}$ は閉作用素である。

2. $\dfrac{d}{dx}$ は不連続である。

記録　J.S